Chapitre 1 | Systèmes d'équations linéaires (SEL)

Dans cette séance, on va apprendre

- reconnaître un SEL et l'écrire sous forme matricielle
- représenter graphiquement les solutions d'un SEL
- notion de SEL équivalents et des opérations élémentaires
- les SEL
  - → incompatibles
  - → compatibles
    - → déterminés
    - → indéterminés

Déf 1.2 Un SEL en les variables $x_1, \dots, x_n$ est une famille d'équations

$$(*) \begin{cases} a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m,1} x_1 + \cdots + a_{m,n} x_n = b_m \end{cases}$$

coefficients ($\in \mathbb{R}$)

second membre (des nombres réels ?)

(ensemble de nombres réels)

On dit que $(*)$ est de taille $m \times n$

#équations

#variables

Exemple

$$\left\{\begin{array}{l} 6x + 2y = 1 \\ 7x + 6y = 2 \end{array}\right.$$

second membre

coeff.

$$\left(\begin{array}{l} x = x_1 \\ y = x_2 \end{array}\right)$$

Étant donné

Déf. 1.4 E.d. un SEL $(*)$, une solution de $(*)$ est un n-uplet $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait à toutes éq. dans $(*)$, i.e.

$$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1} s_1 + \ldots + a_{1,n} s_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1} s_1 + \ldots + a_{m,n} s_n = b_m \end{array}\right.$$

✓

On note $S_{(*)}$ l'ensemble formé de toutes les solutions de $(*)$.

Si

(1) $S_{(*)} = \emptyset$ (ensemble vide) $\Rightarrow$ on dit que $(*)$ est <u>incompatible</u>

(2) $S_{(*)} \neq \emptyset$ (i.e. il y a au moins une solution) $\Rightarrow$ on dit que $(*)$ est <u>compatible</u>

Déf 1.4 (cont.) | Si le SEL $(*)$ est <u>compatible</u>

on dit que

- $(*)$ est <u>déterminé</u> si $\#(S_{(*)}) = 1$

($\#(E)$:= quantité d'éléments d'E) — E : ensemble

- $(*)$ est indéterminé si $\#(S_{(*)}) > 1$

Exemple (suite)

$$(*)\ \begin{cases} 6x+2y = 1 \\ 7x+6y = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1/11 \\ y = 5/22 \end{array}}$$

ou $(1/11, 5/22)$ est l'unique sol. de $(*)$

De la 1ère éq.

$$6x = 1-2y \Rightarrow x = \frac{1-2y}{6}$$

Si l'on remplace dans le 2ème:

$$7\cdot\left(\frac{1-2y}{6}\right)+6y = 2 \xrightarrow[\text{calculs}]{\cdots} y = \frac{5}{22}$$

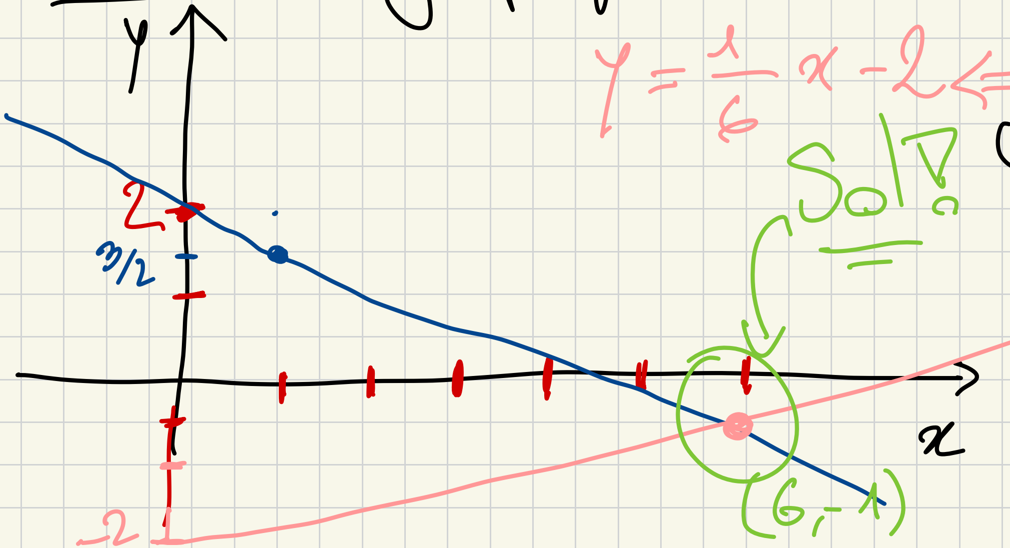
$$\Rightarrow \frac{7}{6} - \frac{14y}{6} + 6y = 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(6-\frac{14}{6}\right)}y = 2-\frac{7}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{22}{6}\cdot y = \frac{5}{6} \Rightarrow y = \frac{5}{22}$$

$\Rightarrow$ Ce SEL est compatible déterminé or $S_{(*)} = \left\{ \left(\frac{1}{11}, \frac{5}{22} \right) \right\}$

Solution graphique d'un SEL de 2 variables



$y = \frac{1}{6}x - 2 \Leftarrow$

$$(*) \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = -\frac{x}{2} + 2$$

BUT Comment trouver des solutions d'un SEL ?

$\boxed{\text{Déf 1.13}}$ É.d. un SEL $(*)$, on définit les opérations élémentaires sur les lignes (OEL)

	Notation:
(OEL.I) On échange les lignes i et j dans $(*)$	$L_i \leftrightarrow L_j$
(OEL.II) On multiplie la i-ème ligne par $\lambda \in \mathbb{R}^*$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$
(OEL.III) On remplace la i-ème ligne par $L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

$\boxed{\text{Exemple}}$

(Par exemple, dans $(*)'$: $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ nous donne

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = 6 \\ 8y = -8 \end{cases}$$
)

THM 1.16 Si $(*)'$ est obtenu de $(*)$, deux SEL, à partir d'OEL, alors $S_{(*)} = S_{(*)'}$

Exemple (cont.)

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow 2 \cdot L_1} \begin{cases} x - 6y = 12 \\ 8y = -8 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{8} \cdot L_2} \begin{cases} x - 6y = 12 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 6L_2} \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

Déf Deux SEL $(*)$ et $(*)'$ sont

équivalents (par les lignes) si l'on peut obtenir (*)' à partir de faire une suite (finie) d'OEL sur (*).

Exemple 1.17 (*) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 6x_1 + 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$

Calculer $S_{(*)}$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{cases} \cancel{0x_1} - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \cancel{0x_1} + 2x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{cases} x_1 + \cancel{0x_2} + 3x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ \cancel{0x_2} - 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 = -\frac{7}{3} \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3} \begin{cases} x_1 + \cancel{0x_3} = \frac{27}{3} \\ x_2 + \cancel{0x_3} = -\frac{10}{3} \\ x_3 = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Alors $S_{(*)} = \left\{\left(\frac{27}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}\right)\right\} \longrightarrow$ SF Compatible déterminé